单公理逻辑系统初览

luisleee

2026 年 1 月 6 日

1 引言

现代数理逻辑的奠基人弗雷格在其 1879 年的划时代著作《概念文字》中，首次构建了一个基本完备的一阶谓词演算系统。然而，弗雷格的系统包含了九条公理，其表述虽严谨却显得颇为繁复，反映了逻辑形式化初期探索的样貌。

进入二十世纪，罗素与怀特海在其巨著《数学原理》中，旨在从逻辑推导出全部数学。他们采用的命题逻辑公理系统（通常被称为 PM 系统）包含五条基本公理。尽管《数学原理》的系统在历史上影响深远，但后来的逻辑学家很快发现，其公理集并非最简，其中一些公理可以彼此推导。这一认识激发了对逻辑基础进行系统性简化与重构的研究热潮。这一时期的逻辑学家们致力于探索逻辑系统最精简的可能性：能否用最少的初始联结词构建完备的逻辑系统？能否将整个系统的公理集缩减为一条？

在这一精简化的浪潮中，波兰逻辑学家 Jan Łukasiewicz 与他的学生 Tarski 于 1930 年提出了一个仅包含蕴涵与否定（C,N）两个联结词的完备公理系统，该系统由三条公理组成。

然而，追求极简的步伐并未停止。是否存在仅凭一条公理就能构建完备的命题逻辑系统？这一挑战吸引了诸多逻辑学家的目光。C. A. Meredith 于 1953 年成功地将 Łukasiewicz 的 (C, N) 系统精简为一条包含 19 个符号的公理。

与此同时，在更少的初始联结词方向，Sheffer 早在 1913 年便证明了 D 联结词（即与非，NAND）是完备的联结词。受此启发，Nicod 在 1917 年首次构建了一个仅基于（D）的命题演算系统，该系统仅包含一条公理和一条推理规则。

本文旨在初览这些单公理系统及其历史背景，介绍波兰记号，并展示 (C, N) 系统，(C,O) 系统，(A,N) 系统以及 (D) 系统这些经典逻辑系统的单公理以及部分推导。

2 波兰记号

Łukasiewicz 提出的波兰记号简而言之是这样的：联结词放在前面，对应的项放在后面。或者说这是一种前缀表达式。

几个常见的联结词记号：

波兰记号	现代记号
Cpq	$p \to q$
Np	$\neg q$
Apq	$p \vee q$
Epq	$p \leftrightarrow q$
Kpq	$p \wedge q$
Dpq	$p \uparrow q$
O	$\perp$

特别需要注意的是，O 是一个零元联结词，或者说逻辑常量，表示**假**。

由于每个联结词的元数是固定的，所以可以不加括号而无歧义地表达任何逻辑表达式。这样的表达式虽然可能比较晦涩，但是相当简洁紧凑。加上括号和空格可能更方便理解一点。例如

$$CCKpNqrCpCNqr$$

写成 Haskell 的写法，就可以被解释为：

```
C (C (K p (N q)) r) (C p (C (N q) r))
```

3 完备的联结词

在经典二值命题逻辑中，一个逻辑联结词的集合被称为完备的（或称功能完备），当且仅当仅用该集合中的联结词就可以定义出所有可能的真值函数。

最常用的一套完备联结词是 $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$。不过显然这不是极小的那一种。我们能用 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 替换掉 $p \leftrightarrow q$，从而去掉 $\leftrightarrow$，诸如此类。

一些经典的完备联结词组合有：

- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \rightarrow\}$
- $\{\uparrow\}$
- $\{\downarrow\}$

$\uparrow$ 最早由谢弗在 1913 年被发现为一个完备的逻辑联结词。实际上，Peirce 在 1880 年就已经意识到 $\downarrow$ 的完备性，但未发表。

Post 完备性定理给出了一个联结词集合完备的充要条件。联结词集合完备当且仅当它同时不满足以下五类性质：

1. 保真性（全体变量真时公式真）
2. 保假性
3. 线性性（可表示为模 2 加和常数）
4. 单调性
5. 自对偶性

一旦确定了完备的联结词组合，我们就可以构建一个表达能力完整的逻辑系统。取出不完备的联结词组合，我们也可以构建逻辑系统，即使这种子系统表达能力不足，它本身也可能具有丰富、有趣且重要的结构。一个经典的例子是蕴含命题演算（IPC）。

4　IPC 的单公理

IPC 的表达能力是要弱于经典的命题逻辑的，它只包含 C 联结词，所以它在所有变量都为真时公式也为真，因此无法表示任意的真值函数。如果加上单独的逻辑常量假值，它才能算是完备的。

Tarski-Bernays 构建的公理是这样的：

$$S : CpCqp \qquad \text{(简化律)}$$

$$P : CCCpqpp \qquad \text{(皮尔士律)}$$

$$H : CCpqCCqrCpr \qquad \text{(假言三段论)}$$

Łukasiewicz 在 1948 年给出了 13 个符号的单公理：

$$CCCpqrCCrpCsp$$

1968 年，Richard Tursman 证明了它是唯一一个 13 符号单公理（除了 $CCpqCCCqrpCsq$ 可能是个例外）。1972 年 T. Sekimoto 用计算机验证了证明的正确性，并验证了 $CCpqCCCqrpCsq$ 确实不是一个单公理。

5 (C, N) 系统的单公理

(C,N) 系统，顾名思义就是只包含蕴含和否定这两个联结词的逻辑系统。

一个经典公理系统由 Łukasiewicz 给出，包含三个公理：

$$\text{L1: } CCpqCCqrCpr \qquad \text{(蕴含的传递性)}$$

$$\text{L2: } CpCNpq \qquad \text{(否定与蕴含的特性)}$$

$$\text{L3: } CCNppp \qquad \text{(否定之否定的消除)}$$

其推理规则就是分离规则（Modus Ponens），即从 p 和 Cpq 推导 q。

C.A.Meredith 给出的 (C, N) 系统的单公理如下：

$$CCCCCpqCNrNsrtCCtpCsp$$

包含联结词共有 19 个符号。

其完备性的证明如下：

$$CCCCCpqCNrNsrtCCtpCsp \tag{1}$$

$1\ p/Cpq,\ q/CNCNtNrNs,\ r/t,\ s/r,\ t/CCtpCsp\ \times C1\ r/CNtNr\ -\ 2$

$$CCCCtpCspCpqCrCpq \tag{2}$$

$1\ p/t,\ q/Np,\ r/CNpq,\ s/p,\ t/CrCNpq\ \times\ C2\ p/Np,\ s/NCNpq\ -\ 3$

$$CCCrCNpqtCpt \tag{3}$$

$1\ p/r,\ r/p,\ t/Cpp\ \times\ C3\ r/Crq,\ q/Ns\ t/p\ -\ 4$

$$CCCpprCsr \tag{4}$$

$4\ p/Cpp,\ r/CsCpp,\ s/q\ \times\ C4\ r/Cpp\ -\ 5$

$$CqCsCpp \tag{5}$$

$1\ p/r,\ s/q,\ t/CsCpp\ \times\ C5\ q/CCCrqCNrNqr\ -\ 6$

$$CCCsCpprCqr \tag{6}$$

$1\ s/r,\ t/Cqr\ \times\ C6\ s/Cpq,\ p/Nr\ -\ 7$

$$CCqrpCrp \tag{7}$$

$7\ q/CCCpqCNrNsr,\ r/t,\ p/CCtpCsp\ \times\ C1\ -\ 8$

$$CtCCtpCsp \tag{8}$$

$8\ t/CCCrCNpqtCpt,\ p/u\ \times\ C3\ -\ 9$

$$CCCCCrCNpqtCptuCsu \tag{9}$$

$1\ p/CrCNNpq,\ q/Nt,\ r/p,\ s/t,\ t/Csp\ \times\ C9\ p/Np,\ t/Nt,\ u/p\ -\ 10$

$$CCCspCrCNNpqCtCrCNNpq \tag{10}$$

$10\ s/CCCqqCNrNNNpr,\ r/Cpq,\ t/1\ \times\ C1\ p/q,\ s/NNp,\ t/p\ -\ C1\ -\ 11$

$$CCpqCNNpq \tag{11}$$

$7\ p/CCCqrpCsp\ \times\ C8\ t/Cqr\ -\ 12$

$$CrCCCqrpCsp \tag{12}$$

$1\ t/CCCtCCCpqCNrNsruCvu\ \times\ C12\ r/CCCpqCNrNsr,\ q/t,$
$p/u,\ s/v\ -\ 13$

$$CCCCCtCCCpqCNrNsruCvupCsp \tag{13}$$

$1\ p/CtCCCpqCNrNsr,\ q/Nu,\ r/p,\ s/u,\ t/Csp\ \times\ C13\ u/Nu,$
$v/Np\ -\ 14$

$$CCCspCtCCCpqCNrNsrCuCtCCCpqCNrNsr \tag{14}$$

$14\ t/CCspr,\ u/1\ \times\ C8\ t/Csp,\ p/r,\ s/CCpqCNrNs\ -\ C1\ -\ 15$

$$CCCsprCCCpqCNrNsr \tag{15}$$

$15\ r/CCCtCsprCur\ \times\ Cl2\ r/Csp,\ q/t,\ p/r,\ S/u\ -\ 16$

$$CCCpqCNCCCtCsprCurNsCCCtCsprCur \tag{16}$$

$1\; r/CNCCCtCsCpqrCurNs,\ s/v,\ t/CCCtCsCpqrCur \ \times\ C16\; p/Cpq,$
$q/CNCNCCCtCsCpqrCurNsNv \ -\ 17$

$$CCCCCtCsCpqrCurpCvp \tag{17}$$

$1\; p/CtCsCpq,\ q/Nr,\ r/p,\ s/r,\ t/Cvp \ \times\ C17\; r/Nr,\ u/Np \ -\ 18$

$$CCCvpCtCsCpqCrCtCsCpq \tag{18}$$

$18\; v/CCCCpqqCNrNsr,\ t/CpCpq,\ r/1 \ \times\ C1\; p/Cpq,\ t/p \ -\ C1\ -19$

$$CCpCpqCsCpq \tag{19}$$

$19\; p/CpCpq,\ q/Cpq,\ s/1 \ \times\ C19\; s/CpCpq \ -\ C1\ -20$

$$CCpCpqCpq \tag{20}$$

$3\; r/Np,\ t/CNpq \ \times\ C20\; p/Np \ -\ 21$

$$^{*}CpCNpq \tag{21}$$

$8\; t/CCpqCNNpq,\ p/r \ \times\ C11 \ -\ 22$

$$CCCCpqCNNpqrCsr \tag{22}$$

$20\; p/CCCpqCNNpqr,\ q/r \ \times\ C22\; s/CCCpqCNNpqr \ -\ 23$

$$CCCCpqCNNpqrr \tag{23}$$

$1\; q/Ns,\ r/Np,\ t/Np \ \times\ C23\; q/Ns,\ r/Np \ -\ 24$

$$CCNppCsp \tag{24}$$

$20\; p/CNpp,\ q/p \ \times\ C24\; s/CNpp \ -\ 25$

$$^{*}CCNppp \tag{25}$$

$4\; p/r,\ r/CNNrr \ \times\ C11\; p/r,\ q/r \ -\ 26$

$$CsCNNrr \tag{26}$$

$8\; t/CsCNNrr,\ s/q \ \times\ C26 \ -\ 27$

$$CCCsCNNrrpCqp \tag{27}$$

$20\; p/CCsCNNrrp,\ q/p \ \times\ C27\; q/CCsCNNrrp \ -\ 28$

$$CCCsCNNrrpp \tag{28}$$

$11\; p/CCsCNNrrp,\ q/p \ \times\ C28 \ -\ 29$

$$CNNCCsCNNrrpp \tag{29}$$

$12\; r/CNNCCsCNNrrpp,\ p/t,\ s/u \ \times\ C29 \ -\ 30$

$$CCCqCNNCCsCNNrrpptCut \tag{30}$$

1 $p/q,\ r/NCCsCNNrrNp,\ s/p,\ t/CuNCCsCNNrrNp\ \times\ C30\, q/Cqq,$
$p/Np,\ t/NCCsCNNrrNp\ -\ 31$

$$CCCuNCCsCNNrrNpqCpq \tag{31}$$

31 $u/CsCNNrr,\ q/NCCsCNNrrNp\ \times\ C28\, p/NCCsCNNrrNp\ -\ 32$

$$CpNCCsCNNrrNp \tag{32}$$

12 $r/CpNCCsCNNrrNp,\ p/t,\ s/u\ \times\ C32\ -\ 33$

$$CCCqCpNCCsCNNrrNptCut \tag{33}$$

20 $p/CCqCpNCCsCNNrrNpt,\ q/t\ \times\ C33\, u/CCqCpNCCsCNNrrNpt\ -\ 34$

$$CCCqCpNCCsCNNrrNptt \tag{34}$$

1 $p/q,\ r/p,\ s/CCsCNNrrNNp,\ t/p\ \times\ C34\, q/Cqq,\ p/Np,\ t/p\ -\ 35$

$$CCpqCCCsCNNrrNNpq \tag{35}$$

35 $p/Cpq,\ q/CCCsCNNrrNNpgq,\ s/t,\ r/u\ \times\ C35\ -\ 36$

$$CCCtCNNuuNNCpqCCCsCNNrrNNpq \tag{36}$$

1 $p/t,\ r/NNCpq,\ s/Cpq,\ t/CCCsCNNrrNNpq\ \times\ C36\, t/Ctq,$
$u/NCpq\ -\ 37$

$$CCCCCsCNNrrNNpqtCCpqt \tag{37}$$

37 $s/Crq,\ r/Np,\ t/CCqrCpr\ \times\ C1\, p/r,\ r/NNp,\ s/p,\ t/q\ -\ 38$

$$^{*}CCpqCCqrCpr \tag{38}$$

证明中 / 表示进行变量替换，× 和 − 表示应用分离规则得到结果，带星的是 Łukasiewicz 的三个公理。

6 （C, O）系统的单公理

(C,O) 系统，顾名思义就是只包含蕴含和假值 O 这两个联结词的逻辑系统。

(C,O) 系统的一个经典公理系统由 Tarski-Bernays 给出，包含四条公

理：

$$
\begin{array}{ll}
CCpqCCqrCpr & \text{(假言三段论)} \\
CpCqp & \text{(肯定后件律)} \\
CCCpqpp & \text{(皮尔士律)} \\
COp & \text{(爆炸原理)}
\end{array}
$$

其推理规则仍然只有分离规则，即从 p 和 Cpq 推导 q。

Meredith 给出了 (C,O) 系统的一个单公理：

$$CCCCCpqCrOstCCtpCrp$$

Meredith 称他几乎完成了 (C,O) 系统不存在比 19 个符号更短的单公理的证明。但直到 2000 年，Branden Fitelson 等人才用计算机搜索证明了这一点。

7 (A,N) 系统的单公理

(A,N) 系统，顾名思义就是只包含析取和否定这两个联结词的逻辑系统。

(A,N) 系统最经典的公理化就是《数学原理》中的：

$$
\begin{array}{ll}
CCqrCApqApr & \text{(分配律)} \\
CApqAqp & \text{(交换律)} \\
CpAqp & \text{(引入律)} \\
CAppp & \text{(幂等律)}
\end{array}
$$

这里虽然出现了 C，不过它就是 AN 的缩写。

其推理规则也是分离规则。

8 (D) 系统的单公理

(D) 系统的单公理显然可以通过把前面那些系统的单公理进行简单的替换而得到。但这样的话其长度显然比较不友好。

Nicod 给出了 (D) 系统的一个 23 个符号单公理：

$$DDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps$$

他也给出了对应的推理规则，即从 p 和 $DpDpq$ 推导出 r。

Łukasiewicz 的学生 Mordchaj Wajsberg 在 1977 年给出了一个更方便的 23 符号单公理（它不包含 Dpp 这种形式）：

$$DDpDqrDDDsrDDpsDpsDpDpq$$

Fitelson 等人用计算机证明了 (D) 系统不存在比 23 个符号更短的单公理，并给出了更多 23 符号单公理，例如

$$DDpDqrDDpDqrDDsrDDrsDps$$

参考文献

[1] Branden Fitelson and Larry Wos. Missing proofs found. *Journal of Automated Reasoning*, 27(2):201–225, 2001.

[2] Carew A Meredith. *Single axioms for the systems (C, N),(C, O) and (A, N) of the two-valued propositional calculus.* Institute of Applied Logic, 1953.

[3] Jean Nicod. A reduction in the number of primitive propositions of logic. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 19, pages 32–41, 1917.

[4] Toshihiko Sekimoto. On the uniqueness of the shortest single axiom for the implicational calculus of propositions. *Proceedings of the Japan Academy*, 48(5):290–292, 1972.

[5] G. N. T. Jan lukasiewicz. selected works. *Review of Metaphysics*, 26(1):164–164, 1972.